

Varianta 063

Subiectul I

a) $z = \sqrt{5} + i\sqrt{3} \Rightarrow \bar{z} = \sqrt{5} - i\sqrt{3};$

b) Distanța cerută este $\frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

c) $1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

d) Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L, M, N$ coliniare;

e) Evident latura este 5 iar aria este 25;

f) Latura triunghiului este 8; aria sa este $16\sqrt{3}$; fie h înălțimea triunghiului $\Rightarrow \frac{8 \cdot 4}{2} = 16\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}.$

Subiectul II:

1.

a) $C_5^3 + C_5^2 + C_5^1 + C_5^0 = 10 + 10 + 5 + 1 = 26;$

b) Deoarece numai 2,3,4 verifică inegalitatea obțin că probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$

c) Evident $g(x) = x - 10 \Rightarrow g(11) = 1;$

d) $3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -3;$

e) Suma rădăcinilor este -2, iar produsul -1;

2.

a) Ecuația devine $x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 1$ sau $x = -1$

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} + 1)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)dx = \left(\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + x\right) \Big|_0^1 = \frac{7}{4};$

c) $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, (\forall)x \in \mathbf{R}^*;$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{3};$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3(x + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1 + \sqrt[3]{x})} = \frac{1}{3};$

Subiectul III

a) $0 = 0 + 0 \cdot \omega \in \mathbf{Z}[\omega]; 1 = 1 + 0 \cdot \omega \in \mathbf{Z}[\omega];$

b) Prin calcul direct;

$$c) \omega + \bar{\omega} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ și } \omega \cdot \bar{\omega} = \frac{1-3i^2}{4} = 1;$$

d) Prin calcul direct obținem: $\omega^3 = -1$;

e) Fie $x, y \in \mathbf{Z}[\omega] \Rightarrow (\exists) a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ cu $x = a + b\omega, y = c + d\omega$. Am $x + y = (a + c) + (b + d)\omega \in \mathbf{Z}[\omega]$ și $xy = ac + bd\omega^2 + (ad + bc)\omega = ac + bd(1 - \omega) + (ad + bc)\omega = (ac + bd) + (ad + bc - bd)\omega \in \mathbf{Z}[\omega]$

f) Prin calcul direct;

g) Fie $z \in \mathbf{Z}[\omega] \Rightarrow (\exists) a, b \in \mathbf{Z}$ cu $z = a + b\omega$ și $\bar{z} = a + b\bar{\omega}$;

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + ab(\omega + \bar{\omega}) + b^2\omega\bar{\omega} = a^2 + ab + b^2 \in \mathbf{Z} \text{ dar } a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

, deci $z \cdot \bar{z} \in \mathbf{N}$

Subiectul IV:

$$a) f'(x) = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} = g(x), (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

b) Evident $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0, (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$;

c) Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ și f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ rezultă că $f(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$;

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 1;$$

$$e) \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \ln(e + 1) - \ln 2 = \ln \frac{e + 1}{2};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty; \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 \text{ (am aplicat l'Hospital);}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(e^x + 1) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{e^x + 1}{e^x} = 0$$

Deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică către $+\infty$;

$$g) f(x^3) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^{x^3} + 1) = \ln 2 \Leftrightarrow e^{x^3} = 1 \Leftrightarrow e^{x^3} = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$